La programmation mathématique positive dans les modèles d'exploitation agricole

Gohin Alexandre et Chantreuil Frédéric

INRA – Secteur Société, Economie et Décision – Département Economie et Sociologie Rurales

Unité de Rennes, Equipe Politique Agricole et Modélisation

Rue Adolphe Bobierre

CS 61103

35011 Rennes cedex

Abstract

The modelling of growers behaviour using mathematical programming is a long tradition in agricultural economics. For many years, the linear mathematical programming approach has been preponderant in this domain. But linear programming models, that are tightly constrained to reproduce the choices observed at the reference year, are often unacceptable. The resulting model is generally inappropriate under policy changes. Previous researchers point out this problem and several solutions were proposed: insertion of risk, insertion of "flexibility" constraints, etc. To solve this problem, several methodological developments were done and Positive Mathematical Programming (PMP) takes form progressively. PMP is applied since more than ten years but its formal presentation is relatively recent. In this paper we discuss the principles and the validity of using (PMP) as part of agricultural economic models. We recall first the principles of PMP. Then, using a simple example of an arable crop grower, we provide an exhaustive presentation of the implementation of the "standard" PMP and the calibration process generally used. Then, we focus our analysis on the consequences of two assumptions generally admitted when PMP is implemented. The first one is the implicit assumption of constant yields for marginal cultures. The second one is the exogeneity of margin per hectare or the exogeneity of cost per hectare. The assumption of constant yields for the "last" culture is a serious objection one can made to agricultural economic models using PMP. Actually, a drop of the price of a given culture only modifies the surfaces allocated to this culture and to the culture with constant yields. The second assumption which is debatable is the one usually made when non-linearity is introduced in the objective function via a non-linear cost function. The fact that margin per hectare is exogenous implies that an exogenous shock on a given culture has some effects on one and only one input: the land. In other words, the calibration procedure of the "standard" PMP does not take into account the effects of the prices on the yields. In the same way, when non-linearity is introduced via a yield function, an exogenous shock on a given culture has no effect on the production cost per hectare of this culture. In both cases, we propose some solutions in order to relax these assumptions or to improve the calibration procedure. We show that calibration process without related problems can be implemented, sometime in an easier way. Even, PMP is particularly useful to simulate the effects of reforms of arable crop market regulations on the crop acreage allocation, the analysis of the consequences of these two assumptions brings out the limits of this approach. Nevertheless, the PMP approach is a useful tool to represent the behaviour of growers and to simulate impacts of agricultural policy changes. Our analysis brings out that PMP has to be used carefully, in particular when we calibrate the parameters of the model.

Key words: positive mathematical programming, ,

Résumé

Dans cet article, nous discutons de la validité de la Programmation Mathématique Positive (PMP). A l'aide d'un exemple simple, nous présentons de manière exhaustive la mise en œuvre de la PMP. Nous discutons des conséquences de l'hypothèse qui consiste à imposer implicitement des rendements d'échelle constants pour les productions marginales et nous soulignons les problèmes posés par l'introduction de la non-linéarité dans la fonction objective. Nous montrons dans quelle mesures, ces hypothèses affaiblissent le degré de pertinence des résultats des modèles de PMP lors de simulations. Dans chacun des cas, plusieurs solutions sont proposées. Malgré d'indéniables avantages, l'analyse des conséquences des hypothèses de la PMP met en exergue les limites de cette approche. Ces limites ne permettent pas pour autant de remettre en cause la PMP, mais montrent que cette approche doit être utilisée avec beaucoup de précautions, en particulier lors du calibrage des paramètres du modèle.

Mots clé : programmation mathématique positive,

1. Introduction

La modélisation du comportement des agriculteurs à l'offre de produits et/ou à la demande dérivée d'intrants par la programmation mathématique est une longue tradition en économie agricole.[1] De manière très générale, les modèles de programmation mathématique appliqués au niveau de l'exploitation agricole individuelle consistent à déterminer les niveaux des variables de décision de cette exploitation qui maximisent une variable économique sous des contraintes techniques. Les variables économiques généralement maximisées sont les recettes brutes ou le profit ou l'opposé des coûts. Les contraintes techniques définissent implicitement un ensemble de production convexe par rapport aux variables de décision de l'exploitation. Ces modèles de programmation mathématique permettent alors de représenter le fonctionnement technico-économique des exploitations agricoles et de simuler les impacts de chocs exogènes (un changement de politique agricole par exemple) sur leurs variables de décision.

Si les fondements de la programmation mathématique sont relativement simples et cohérents avec la théorie micro-économique néoclassique du producteur, la mise en oeuvre de cette approche est nettement plus délicate. Deux problèmes majeurs se posent pour le modélisateur qui dispose généralement d'un ensemble limité d'informations : la spécification de la fonction objective et des contraintes techniques d'une part, le calibrage des paramètres introduits dans ces fonctions d'autre part. La programmation mathématique linéaire (PML) est un cas particulier de cette modélisation où la fonction objective et les contraintes techniques sont spécifiées de manière linéaire par rapport aux variables de décision. Cette approche linéaire, longtemps prédominante en économie agricole, offre l'avantage d'être plus facile à résoudre que les approches non linéaires.[2] De plus, la spécification linéaire permet de borner le nombre de paramètres à calibrer à (m+1) fois le nombre de variables de décision, où m représente le nombre de contraintes techniques. Enfin et surtout, la PML représente en fait des technologies de production de type Leontief ; les paramètres des contraintes techniques de production s'interprétent alors comme des coefficients inputs-outputs (cf. Just et al., 1983). Le calibrage déterministe de ces derniers peut alors être réalisé à partir d'informations techniques extérieures à la modélisation. Mais cette relative simplicité de mise en oeuvre de la PML a plusieurs revers. D'une part, cette approche ne permet généralement pas de reproduire exactement les prises de décision observées des agriculteurs, sauf si des contraintes techniques très sévères qui "figent" le modèle sont introduites. D'autre part, la simulation de scénarios avec la PML entraîne soit aucun changement, soit des "basculements" importants dans les décisions des agriculteurs. En d'autres termes, les modèles de PML produisent des résultats discontinus et des spécialisations extrêmes des exploitations agricoles dans certaines productions.

Ces problèmes de la PML ont déjà été mentionnés à plusieurs reprises (par exemple, cf. Mac Carl, 1982, Hazell et Norton, 1986). De nombreux développements de la modélisation par la programmation mathématique ont alors cherché à dépasser ces problèmes, et ont donné progressivement naissance à la programmation mathématique positive (PMP). Bien qu'étant appliquée depuis plus de dix ans, la présentation formelle de cette méthode par Howitt est relativement récente (Howitt, 1995a) et depuis, de nombreuses études ou articles

[1] A notre connaissance, les premiers modèles de programmation mathématique en économie agricole datent du début des années 1950 avec les travaux de King (1953) et de Heady (1954).
[2] Cet argument en faveur de l'utilisation de la PML est aujourd'hui moins pertinent.

finalisés s'appuient sur cette méthode.[3] La PMP permet de calibrer de manière exacte les modèles d'exploitation agricole en utilisant un ensemble de données restreint et sans "figer" le modèle. La différence essentielle de la PMP par rapport à la PML réside dans la spécification de fonctions non linéaires qui permettent alors de reproduire une situation observée et de "lisser" les résultats de scénarios. La non linéarité a, jusqu'à présent, été principalement introduite dans la fonction objective au niveau des recettes (Howitt, 1995a) ou des coûts de production (Arfini et Paris, 1996).

Dans cet article à vocation méthodologique, l'objectif principal est de discuter de la validité et des conséquences de deux hypothèses admises dans la mise en oeuvre "standard" de la PMP. La première consiste à imposer implicitement des rendements d'échelle constants pour les productions les moins "intéressantes" par rapport à la variable économique maximisée. Cette hypothèse est particulièrement problématique lors de la phase de simulation avec ce type de modèle. L'exogénéité des recettes par hectare (lorsque la non linéarité est spécifiée dans les coûts) ou des coûts par hectare (lorsque la non linéarité est spécifiée dans les recettes) est la deuxième hypothèse généralement admise dans les études modélisant le comportement des cultivateurs. Cette hypothèse affaiblit également le degré de pertinence des résultats des modèles de PMP.

Le reste de l'article est organisé de la façon suivante. Dans une première section, les principes et la mise en oeuvre de la PMP sont rappelés à l'aide d'un exemple simple représentant le comportement d'un agriculteur à l'offre de produits de grandes cultures. Cet exemple est utilisé tout au long de l'article pour illustrer nos propos. Dans une deuxième section, nous discutons de manière exhaustive du problème du calibrage des paramètres de la fonction de coût variable des cultures « marginales » et plus particulièrement de l'hypothèse implicite de rendements d'échelle constants imposée à ces cultures. Trois solutions à ce problème sont suggérées dans cette deuxième section. Dans une troisième section, nous formulons une réserve sur l'introduction de la non-linéarité dans la fonction objective, qui consiste à rendre les rendements par hectare ou les coûts par hectare exogènes. De nouveau, sont proposées des solutions à ce deuxième problème. La quatrième section conclut.

2. Principes et mise en oeuvre de la programmation mathématique positive

Pour présenter les principes de la PMP, considérons le cas simple d'une exploitation agricole dotée d'une surface totale $\bar{l}$, produisant seulement trois cultures : du blé tendre ($i = b$), de l'orge ($i = o$) et du tournesol ($i = t$).[4] Les objectifs de la programmation mathématique sont alors généralement de modéliser le comportement de cette exploitation agricole dans ses choix d'allocation de sa surface totale entre les trois cultures et de simuler les effets de changement de politique agricole sur cette allocation. Nous supposons que les informations dont dispose aisément l'économiste agricole pour mettre en oeuvre son modèle d'exploitation agricole sont limitées aux surfaces consacrées à chaque culture (l_i), aux quantités produites (y_i) et aux valeurs des productions ($p_i . y_i$) de chaque culture. Peuvent être alors déduits de ces informations les rendements à l'hectare (r_i) et les prix à la production (p_i) des trois cultures. Les aides directes à l'hectare (s_i) sont supposées également

[3] Voir, entre autres, Garvey et Steele (1998), Paris et Howitt, (1998) ; Barkaoui et Butault (1998) ; Rhöm et al. (1998) ; Carles et al. (1997) ; Britz et Heckelei (1997) ; Arfini (1996) ; Arfini et al. (1995) ; Howitt (1995b).
[4] Seules trois grandes cultures sont choisies dans un souci de simplification. Les raisonnements développés dans ce papier restent valables pour un nombre supérieur de grandes cultures.

facilement observables. Par contre, nous supposons que les coûts de production imputables à chaque culture ne sont pas connus du modélisateur mais seulement des données sur les coûts variables de production de l'ensemble des cultures (par exemple, les coûts de production en engrais ou en produits phytosanitaires). Les données mentionnées ci-dessus sont celles qui sont disponibles dans le Réseau d'Information Comptable Agricole (RICA).[5]

2.1. Les fondements de la programmation mathématique positive

Dans le cadre usuel de la théorie micro-économique néoclassique du producteur, l'exploitation agricole choisit une allocation de sa surface totale qui maximise son profit, étant donné les contraintes techniques de production, le système de prix et les instruments de politique agricole. Par souci de simplification, nous supposons que les prix sont exogènes et que les anticipications sur ces prix sont rationnelles. Au niveau de la politique agricole, les aides directes sont parfaitement couplées au facteur terre et le gel des terres n'est ni obligatoire pour bénéficier des aides directes, ni une option intéressante pour l'exploitation. En ce qui concerne les contraintes techniques de production, l'exploitation agricole est tout d'abord limitée par sa surface totale ; la somme des surfaces cultivées est inférieure ou égale à cette surface totale. De nombreuses autres contraintes techniques interviennent également dans le programme économique de l'exploitation agricole : contrainte agronomique, pédologique, climatique, de capital, de disponibilité de main-d'oeuvre, etc. Introduire ces contraintes dans le modèle suppose des informations précises dont le modélisateur ne dispose généralement pas. Ces contraintes doivent cependant être prises en compte pour deux raisons principales. D'une part, sans ces contraintes, le modèle ne pourra pas reproduire les choix initiaux de production de l'exploitation. Ce problème est généralement rencontré avec les modèles de PML qui conduisent à une simplification des choix de production. D'autre part, lors de la phase de simulation, un choc donné peut produire des changements importants dans les assolements, voire des "basculements" d'une culture à une autre ; par exemple, une baisse modérée de la marge d'une culture peut amener à sa suppression.

La première idée de la PMP par rapport à la PML pour résoudre ce problème de spécification des "autres" contraintes techniques est de représenter indirectement ces dernières dans la fonction objective. Dans la pratique, une fonction de coût à l'hectare (Arfini et Paris, 1995) ou des fonctions de rendement à l'hectare (Howitt, 1995) sont spécifiées pour "résumer" dans un cadre statique ces autres contraintes techniques qui peuvent être de nature dynamique. Dans le reste de l'article, nous supposons que les rendements à l'hectare sont exogènes et spécifions une fonction de coût variable total de production.[6] Notons à ce stade que cette hypothèse ne fait que déplacer le problème de spécification des autres contraintes techniques vers la fonction de coût variable total de production et que rien n'assure ni la reproduction de la situation initiale, ni un comportement "lisse" du modèle. Notons également que cette procédure "dénature" en quelque sorte la programmation mathématique dans la mesure où

[5] L'exemple utilisé dans cet article peut par conséquent être appliqué aux exploitations du RICA en adaptant le nombre de cultures.

[6] L'autre solution adoptée dans certaines applications, qui consiste à supposer des coûts de production par hectare exogènes et à spécifier des fonctions de rendement à l'hectare, n'est pas retenue ici car nous supposons que les coûts de production à l'hectare ne sont pas directement observables par le modélisateur. Toutefois, les raisonnements developpés dans cet article s'applique de la même manière à cette autre solution.

l'ensemble convexe des productions possibles n'est plus uniquement décrit de manière primale par les contraintes techniques mais également de manière duale à travers la fonction de coût variable total de production.

La deuxième idée de la PMP consiste à considérer que l'allocation choisie par l'exploitation agricole et observée par le modélisateur est une allocation optimale, c'est-à-dire qui maximise son profit étant donné ces contraintes (techniques, de prix et de politique agricole). Ainsi, les données observées peuvent servir de base au calibrage des paramètres spécifiés dans la fonction de coût variable total de production. Généralement, seules les données d'une année de référence sont prises en compte par le modélisateur pour calibrer de manière déterministe ces paramètres. Cette procédure de calibrage garantit que le modèle reproduise l'allocation de l'année de référence.

Enfin, la troisième et dernière idée de la PMP réside dans la spécification non linéaire, par rapport aux variables de décision, de la fonction de coût variable total de production. Le profit de l'exploitation agricole est alors également non linéaire par rapport aux variables de décision. Dans ce cas, les profits marginaux à l'hectare, qui déterminent l'allocation optimale de la surface totale, sont fonction des surfaces allouées à chaque culture. Cette spécification non linéaire assure un comportement "lisse" du modèle. Dans la pratique, afin de limiter le nombre de paramètres à calibrer, la fonction de coût variable total de production est souvent supposée être égale à la somme des fonctions de coûts variables totaux de production par culture, ces dernières étant généralement spécifiées comme des fonctions quadratiques des surfaces allouées à la culture considérée.[7]

2.2. La mise en oeuvre de la programmation mathématique positive

2.2.1. L'écriture mathématique d'un modèle de programmation mathématique positive

Le modèle "standard" de PMP pour l'exploitation agricole décrite ci-dessus s'écrit de la manière suivante :

$$\max_{l_{i=b,o,t}} \sum_{i=b,o,t} p_i.r_i.l_i + s_i.l_i - C(l_b, l_o, l_t) \qquad (1)$$

sous la contrainte :

$$\sum_{i=b,o,t} l_i \leq \bar{l} \qquad (2)$$

L'équation (1) définit le profit de l'exploitation agricole. Il est égal à la somme des productions en valeur plus les aides directes aux surfaces moins le coût variable total de production $C(l_b, l_o, l_t)$. Ce dernier est supposé être une fonction non linéaire des surfaces allouées aux différentes cultures. L'inégalité (2) correspond à la contrainte de terre disponible. Cette contrainte implique que la somme des surfaces allouées aux différentes cultures ne peut être supérieure à la surface totale de l'exploitation.

Le lagrangien associé à ce programme d'optimisation s'écrit :

---

[7] Cette spécification a certes le mérite de la parsimonie mais impose de fortes hypothèses sur les jointures entre les différentes productions. En particulier, elle implique que la jointure provient uniquement de l'existence d'un facteur fixe allouable (la terre) (cf. Guyomard et al., 1996). L'introduction de termes croisés dans la fonction de coût total augmente considérablement le nombre de paramètres et rend plus difficile le calibrage de ceux-ci (cf. Paris et Howitt, 1998).

$$L\left(l_{i=b,o,t},\alpha\right) = \sum_{i=b,o,t} p_i.r_i.l_i + s_i.l_i - C\left(l_b,l_o,l_t\right) + \alpha.(\bar{l} - \underset{i=b,o,t}{} l_i \quad (3)$$

où α désigne le multiplicateur de lagrange associé à la contrainte de disponibilité de terre. Ce multiplicateur mesure l'impact sur le profit d'une variation marginale de la surface totale de l'exploitation ; il peut s'interpréter comme le prix d'opportunité de la terre pour l'exploitation considérée.

Les conditions de Kuhn et Tucker du programme (3) sont :

$$p_i.r_i + s_i - C_i\left(l_b,l_o,l_t\right) - \alpha \leq 0, \quad l_i \geq 0, \quad \left(p_i.r_i + s_i - C_i\left(l_b,l_o,l_t\right) - \alpha\right).l_i = 0, \quad i = b,o,t \quad (4)$$

$$\underset{i=b,o,t}{} l_i - \bar{l} \leq 0, \quad \alpha \geq 0, \quad \left(\underset{i=b,o,t}{} l_i - \bar{l} \right).\alpha = 0 \quad (5)$$

où $C_i\left(l_b,l_o,l_t\right) = \dfrac{\partial C\left(l_b,l_o,l_t\right)}{\partial l_i}$ est la dérivée première de la fonction de coût total par rapport à la surface allouée à la culture i, soit le coût marginal de production à l'hectare de cette culture. Les équations (4) signifient que la surface allouée à la culture i est strictement positive lorsque le profit marginal à l'hectare dégagé par cette culture ($p_i.r_i + s_i - C_i\left(l_b,l_o,l_t\right)$) est égal au prix d'opportunité de la terre. La surface allouée à une culture est par contre nulle lorsque ce profit marginal est inférieur au prix d'opportunité de la terre. D'après les équations (5), le prix d'opportunité de la terre est strictement positif si la somme des surfaces allouées aux différentes cultures est égale à la surface totale disponible. Le prix d'opportunité de la terre est nul si toute la surface disponible n'est pas cultivée.

Pour résoudre ce modèle, il reste à spécifier la forme de la fonction de coût variable total de production et calibrer les paramètres de celles-ci. Cette fonction de coût doit respecter certaines propriétés : elle doit être non décroissante et convexe par rapport aux surfaces allouées à chaque culture. L'éventail des formes possibles respectant ces propriétés est bien évidemment large. Pour des raisons de commodité, la forme quadratique est usuellement utilisée. Nous supposons pour simplifier la présentation que cette fonction de coût variable total de production s'écrit comme suit :

$$C\left(l_b,l_o,l_t\right) = b_b.l_b^2 + b_o.l_o^2 + b_t.l_t^2 \quad (6)$$

Selon cette spécification, le coût marginal de production à l'hectare est une fonction croissante de la surface allouée à la culture considérée. Le problème qui se pose alors est de calibrer les paramètres b_i, sachant que les valeurs des coûts variables totaux de production par culture ne sont pas observés.

2.2.2. Le calibrage des paramètres des fonctions de coût.

La méthode de calibrage suggérée par Howitt (1995) s'effectue en deux étapes.[8] Dans une première étape, le modèle de programmation linéaire constitué des équations (1), (2) est résolu en supposant que les paramètres de la fonction de coût variable total sont nuls et que les surfaces allouées à chaque culture sont inférieures ou égales aux surfaces initiales observées plus un "petit" terme positif. La résolution de ce modèle linéaire détermine des valeurs duales mesurant le coût marginal de production de chaque culture. Dans une seconde étape, ces valeurs duales sont utilisées pour calibrer les paramètres de la fonction de coût variable total. La mise en oeuvre de cette procédure de calibrage est plus amplement détaillée sur la base de l'exemple simplifié. Nous supposons que la recette brute (somme de la valeur de la production et de l'aide directe) liée à la culture de blé tendre est supérieure à la recette brute liée à la culture de l'orge, elle-même supérieure à la recette brute liée à la culture du tournesol. Le modèle de programmation linéaire initialisant le processus de calibrage consiste à maximiser la recette brute totale sous la contrainte de disponibilité de terre et les contraintes spécifiques de calibrage données par les inégalités (9) :

$$\max_{l_b, l_o, l_t} \quad (p_b.r_b + s_b).l_b + (p_o.r_o + s_o).l_o + (p_t.r_t + s_t).l_t \tag{7}$$

sous les contraintes :

$$l_b + l_o + l_t \leq \bar{l} \tag{8}$$

et $$l_b \leq l_b^0 + 0{,}001 \tag{9.i}$$

$$l_o \leq l_o^0 + 0{,}001 \tag{9.ii}$$

$$l_t \leq l_t^0 + 0{,}001 \tag{9.iii}$$

où l_i^0 désigne la surface initiale allouée à la culture de i. Les variables duales associées aux contraintes (9.i), (9.ii) et (9.iii) sont respectivement λ_b, λ_o et λ_t. La résolution de ce modèle linéaire conduit à la solution optimale suivante :

$$l_b = l_b^0 + 0{,}001,\ l_o = l_o^0 + 0{,}001 \text{ et } l_t = l_t^0 - 0{,}002.$$

Les variables duales associées aux différentes contraintes sont égales à :

$$\alpha = p_t.r_t + s_t,\ \lambda_b = p_b.r_b + s_b - p_t.r_t - s_t,\ \lambda_o = p_o.r_o + s_o - p_t.r_t - s_t \text{ et } \lambda_t = 0.$$

La première variable duale mesurant le prix d'opportunité de la terre est égale à la recette brute liée à la culture de tournesol. En effet, si la surface totale varie d'une unité, alors la surface en tournesol varie également d'une unité tandis que les autres surfaces restent inchangées à cause des contraintes spécifiques de calibrage. L'impact sur le profit de cette variation de la surface totale est par conséquent bien égal à la "recette brute tournesol". La deuxième variable duale mesure l'intérêt, en terme de recette brute totale, de l'augmentation marginale de la surface allouée à la culture de blé tendre ; elle est égale à la différence entre la recette brute blé tendre et la

[8] Rappelons ici que Howitt présente une méthode de calibrage des paramètres d'une fonction de rendement et non d'une fonction de coût. Cependant, Howitt affirme à juste titre que cette méthode peut également être appliquée au calibrage de paramètres d'une fonction de coût.

recette brute tournesol.[9] De même, la troisième variable duale mesure l’intérêt de la culture de l’orge et est égale à la différence entre la recette brute orge et la recette brute tournesol. Enfin, la dernière variable duale est nulle car la contrainte (9.iiii) n’est pas saturée. Ces trois variables duales mesurent indirectement les coûts marginaux par hectare de chaque culture qui permettraient d’obtenir, à partir d’un modèle de programmation mathématique sans les contraintes spécifiques de calibrage ci-dessus, les allocations observées initialement. Ces variables duales fournissent donc de l’information pour calibrer les paramètres de la fonction de coût variable total.

Dans une deuxième étape, les paramètres des fonctions de coût variable total sont alors calibrés à partir des valeurs des variables duales. Ces paramètres sont donnés par les équations suivantes :

$$b_i = \lambda_i / \left(2.l_i^0\right), \quad i = b,o,t \tag{10}$$

L'équation (10) n'est pas valable si la surface initialement allouée à la culture i est nulle. Ceci implique en particulier que cette méthode ne permet pas de "calibrer" les cultures qui ne sont pas produites dans l'année de référence.[10] Remarquons finalement à ce stade que la spécification d'une fonction de coût variable total parsimonieuse dans les paramètres permet de calibrer aisément ceux-ci. Si, au contraire, la fonction de coût variable total dépend d'un nombre de paramètres supérieur au nombre de cultures, alors des informations extérieures sont nécessaires pour calibrer l'ensemble des paramètres. La méthode d'entropie est une réponse possible et élégante à ce problème (Paris et Howitt, 1998).

Cette procédure de calibrage déterministe des modèles de PMP offre donc un énorme avantage : elle permet de calibrer automatiquement les modèles en utilisant peu de données. La première étape de cette procédure sert à "révéler" les valeurs des coûts marginaux de production (Arfini et Paris, 1996) qui, dans la seconde étape, permettent de calibrer les paramètres de la fonction de coût variable total. Cependant, comme dans tout travail de modélisation, les résultats fournis par les modèles de PMP sont conditionnels aux hypothèses adoptées dans la conception et la mise en oeuvre de ceux ci. Deux hypothèses admises ci-dessus sont à présent discutées.

3. Le calibrage des paramètres de la « dernière » culture.

Dans le processus de calibrage des paramètres de la fonction de coût variable total, nous avons implicitement fixé le coût marginal de production par hectare de la culture la moins profitable (c'est-à-dire le tournesol) à zéro ($b_t = 0$). Ceci vient du fait que la variable duale associé à la contrainte spécifique de calibrage pour cette culture est nulle ($\lambda_t = 0$). Cette conséquence de la procédure standard de calibrage n'est évidemment pas très réaliste.

Une première solution à ce problème est de supposer que le modélisateur, même s'il ne peut disposer d'informations sur la valeur des coûts variables totaux de chaque culture, peut tout de même observer certains coûts variables par hectare spécifiques à chaque culture.[11] Ces derniers sont notés a_i. Cette information

---

[9] A surface totale donnée, l'augmentation marginale de la surface en blé entraîne nécessairement une diminution d'un même montant de la surface en tournesol.

[10] Ce problème n'est pas spécifique aux modèles de PMP.

[11] Cette hypothèse est admise par de nombreuses études finalisées qui ne précisent généralement pas la provenance de cette information supplémentaire et/ou la manière dont elle a été élaborée. Reconnaissons

supplémentaire est généralement toujours insuffisante pour que les modèles de PML reproduisent exactement la situation de référence. La spécification non linéaire de la fonction de coût variable totale est par conséquent toujours nécessaire. Dans ce cas, cette fonction de coût variable totale est généralement spécifiée de la manière suivante :

$$C\left(l_b, l_o, l_t\right) = a_b.l_b + a_o.l_o + a_t.l_t + b_b.l_b^2 + b_o.l_o^2 + b_t.l_t^2 \quad (11)$$

La première étape du processus de calibrage des paramètres de la fonction de coût variable total consiste à résoudre le modèle de PML suivant :

$$\max_{l_b, l_o, l_t} \left(p_b.r_b + s_b - a_b\right).l_b + \left(p_o.r_o + s_o - a_o\right).l_o + \left(p_t.r_t + s_t - a_t\right).l_t \quad (12)$$

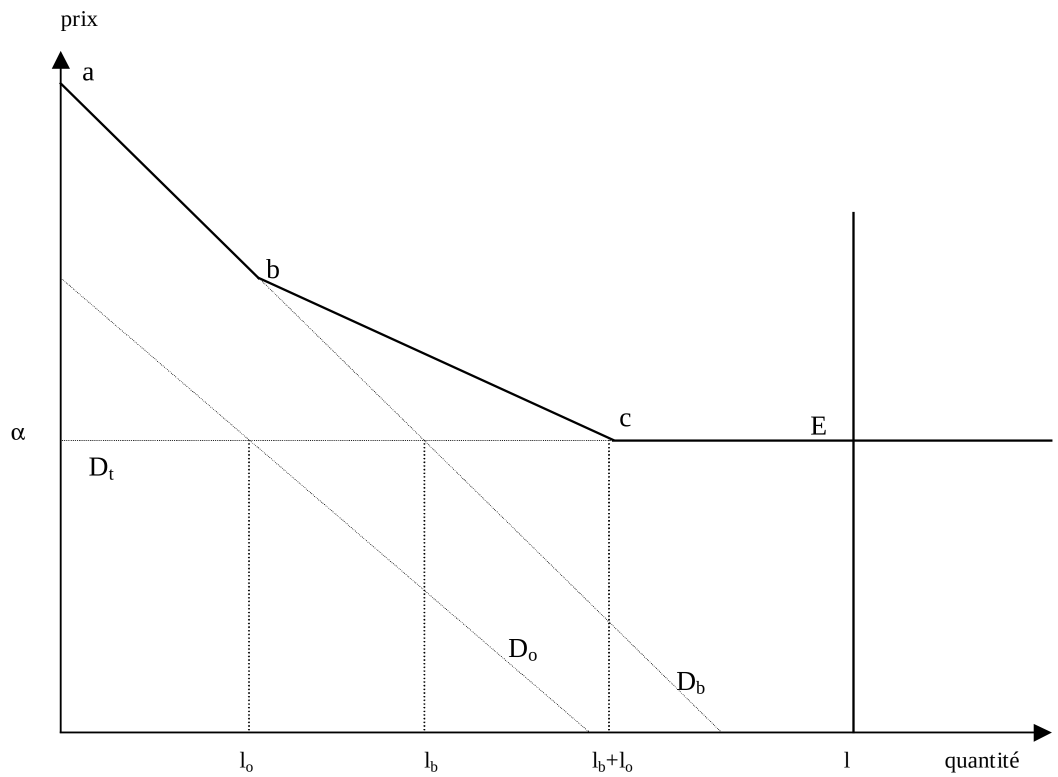
sous les contraintes (8) et (9) définies ci-dessus.

Les variables duales associées aux contraintes (9) mesurent les coûts marginaux par hectare supplémentaires (par rapport aux a_i) qui permettraient d'obtenir l'allocation initiale comme situation optimale. Ces variables duales permettent de calibrer les paramètres b_i de la fonction de coût variable total (11). Avec cette première solution, le coût marginal de production par hectare de la culture la moins profitable n'est plus nul et est donné par a_i. Ce coût marginal est donc indépendant de la surface allouée, ce qui soulève une autre difficulté. En effet, dans ce cas, le profit marginal de la culture la moins profitable est égal au profit moyen. En d'autres termes, ceci revient implicitement à supposer des rendements d'échelle constants pour cette culture. Les problèmes découlant de cette hypothèse sont illustrés graphiquement.

Le graphique 1 représente les demandes dérivées inverses de terre pour chaque culture en fonction de leur surface allouée. Ces demandes dérivées inverses sont égales aux profits marginaux. La demande dérivée inverse de terre pour la culture de blé tendre est représentée par la courbe D_b, celle relative à la culture d'orge par la courbe D_o. La demande dérivée inverse de terre pour la culture de tournesol est quant à elle représentée par la courbe horizontale d'ordonnée α (courbe D_t), en vertu de l'hypothèse de rendements d'échelle constants. La demande dérivée inverse totale de terre dans l'exploitation considérée est donnée par sommation horizontale des trois demandes dérivées inverses précédentes ; la courbe correspondante passe par les points abcE. La terre disponible pour ces trois cultures dans l'exploitation est supposée exogène; la courbe d'offre est donc verticale au niveau de l'abscisse l. L'équilibre sur le marché de la terre dans cette exploitation est alors atteint au point E. Le prix d'opportunité d'équilibre est α et les allocations l_b pour le blé tendre, l_o pour l'orge et enfin $l-l_b-l_o$ pour le tournesol.

toutefois que certaines charges variables spécifiques à chaque culture, telles que les achats de semences, sont renseignées dans certaines sources de statistiques agricoles (données de centres de gestion élaborant des comptabilités analytiques par exemple). La PMP ne peut alors s'appliquer qu'à ces exploitations disposant de comptabilités analytiques.

Graphique 1. Illustration de l'allocation de la terre dans une exploitation.

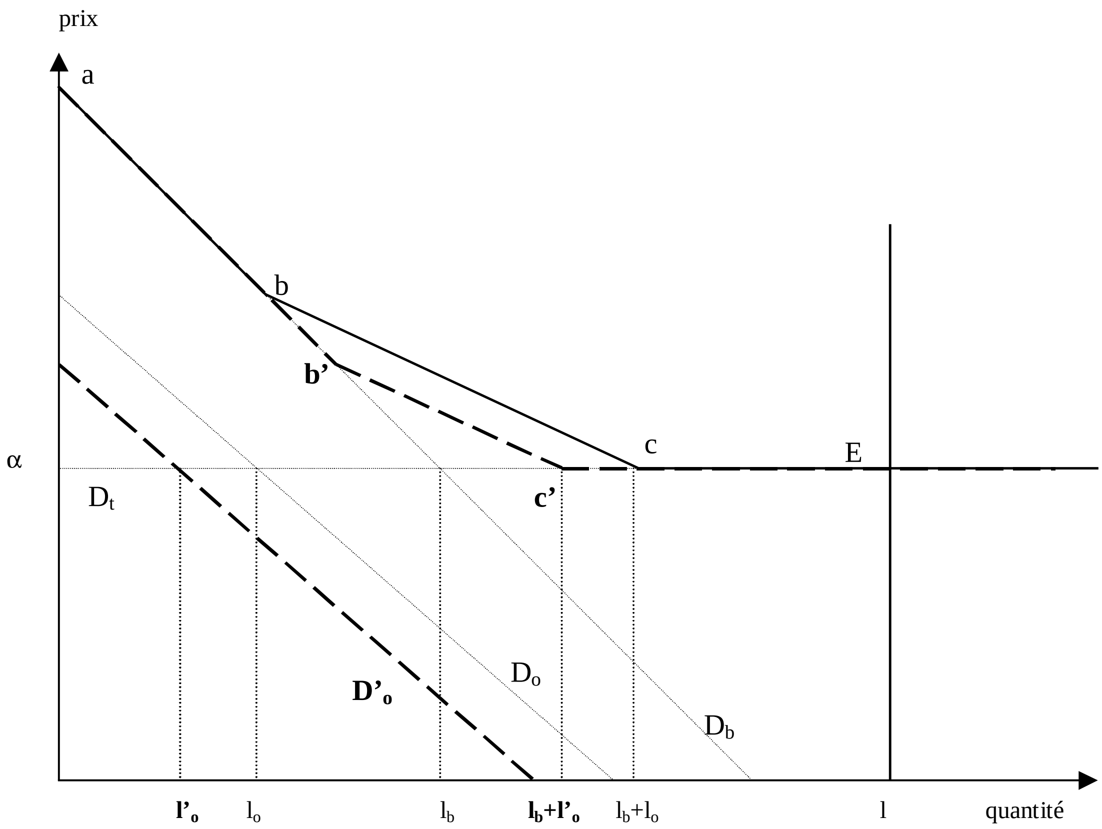


Supposons maintenant que la demande dérivée de terre pour la culture d'orge diminue de manière exogène (par exemple, sous l'effet de la baisse du prix de l'orge ou de la baisse de l'aide directe correspondante). La demande dérivée inverse pour la culture d'orge se déplace alors parallèlement par rapport à sa position initiale et est à présent représentée par la courbe D'_o sur la figure 2. La demande dérivée inverse totale de terre est maintenant représentée par la courbe passant par les points ab'c'E. L'offre de terre étant inchangée, l'équilibre est toujours atteint au point E. Par conséquent, le prix d'opportunité de la terre est toujours égal à α, c'est-à-dire au profit moyen ou marginal du tournesol. Par suite, la surface consacrée à la culture de blé tendre est inchangée (l_b). Seules les surfaces allouées à l'orge et au tournesol sont modifiées par un tel scénario ; la surface en orge devient l'_o et la surface en tournesol $l-l_b-l'_o$.

Le principal problème de l'hypothèse de rendements d'échelle constants, illustré par l'exemple ci-dessus, est que le prix d'opportunité de la terre est figé au profit marginal de la culture à rendements d'échelle constants.[12] L'autre problème qui en découle est qu'un choc exogène sur une culture modifie uniquement les surfaces allouées à cette culture et à la culture à rendements d'échelle constants.[13] Le remède à ces deux problèmes est de lever l'hypothèse de rendements d'échelle constants pour la culture la moins profitable. Ceci nécessite en revanche encore une information supplémentaire cruciale.[14]

[12] Excepté les cas où un choc entraîne un déplacement vers le haut des courbes de demande dérivée de terre des cultures à rendements d'échelle décroissants tel que le point c se situe à droite de la courbe verticale d'offre.
[13] Ce résultat est indépendant du nombre de cultures prises en compte dans l'analyse.
[14] Leclaire (1997) suppose de manière arbitraire que le profit marginal de la culture la moins profitable est égal à 0,9 fois le profit moyen de celle-ci.

Graphique 2. Impact d'une modification d'une demande dérivée inverse de terre



Une deuxième solution est de repartir des équations (4). Ces équations, en utilisant la spécification de la fonction de coût variable total (6), peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$p_i.r_i + s_i - 2b_i l_i - \alpha \leq 0, \quad l_i \geq 0, \quad (p_i.r_i + s_i - 2b_i l_i - \alpha).l_i = 0, \quad i = b,o,t \qquad (13)$$

Rappelons ici, que le multiplicateur de Lagrange α peut s'interpréter comme le prix d'opportunité de la terre pour l'exploitation considérée. Les équations (13) signifient donc que ce prix d'opportunité de la terre est, à l'optimum, égal au profit marginal à l'hectare dégagé pour chaque culture. Comme nous l'avons déjà mentionné, le problème majeur est alors celui de la détermination des paramètres de la fonction de coût variable total. D'autres informations extérieures sont nécessaires pour calibrer l'ensemble de ces paramètres. Une possibilité consisterait à collecter des informations supplémentaires (prix de location ou prix d'achat de la terre par exemple) permettant de connaître ou d'estimer le prix d'opportunité de la terre. Ainsi, il serait possible de calibrer les paramètres de la fonction de coût variable à partir de la valeur estimée du prix d'opportunité de la terre, des équations (13) et des données observées pour l'année de référence considérée. Cette solution permettrait, d'une part d'avoir un coût marginal strictement positif pour la culture la moins profitable[15] et d'autre part le problème lié à l'hypothèse de rendements d'échelle constants de cette dernière ne se poserait plus. En

[15] Ceci revient à supposer que la valeur obtenue pour le prix d'opportunité de la terre soit strictement inférieur à la recette brute de la culture la moins profitable.

effet, cette solution permettant de calibrer les paramètres de la fonction de coût variable total se substitue entièrement à la méthode de calibrage proposée par Howitt.

Une troisième solution plus judicieuse consiste à utiliser toute l'information dont on dispose dans le RICA. En particulier le niveau du coût variable total. Considérons de nouveau les équations (10) de la deuxième étape de la méthode de calibrage suggérée par Howitt. Ces équations permettent de calibrer les paramètres de la fonction de coût variable total à partir des valeurs duales déterminées lors de la première étape du processus de calibrage. Rappelons que dans ce processus de calibrage des paramètres de la fonction de coût variable total , le coût marginal de production par hectare du tournesol (i.e. la culture la moins profitable) est implicitement fixé à zéro. Ceci entraîne que le paramètre de la fonction de coût variable total du tournesol (b_t) est nul. Cette conséquence est due au fait que la contrainte spécifique de calibrage associée au tournesol n'est pas saturée. Ainsi, les équations (10) ne fournissent en fait que deux informations pour calibrer trois paramètres. Ces informations peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$b_b = \lambda_b / \left(2l_b^o\right) = {}^{1}\!/_{2l_b^o} \left(p_b r_b + s_b - p_t r_t - s_t\right) \qquad (14)$$

et

$$b_o = \lambda_o / \left(2l_o^o\right) = {}^{1}\!/_{2l_o^o} \left(p_o r_o + s_o - p_t r_t - s_t\right) \qquad (15)$$

Pour présenter les principes et la mise en œuvre de la PMP, nous avons supposer que l'économiste agricole ne pouvait pas observer les coûts de production imputables à chaque culture. Par contre les coûts variables de production de l'ensemble des cultures sont renseignés dans le RICA. En d'autres termes, nous avons a notre disposition une troisième information qui est la valeur du coût variable total que doit supporter l'exploitation pour l'année de référence considérée. Cette information peut être formalisée de la façon suivante :

$$C\left(l_b^o, l_o^o, l_t^o\right) = b_b l_b^o + b_o l_o^o + b_t l_t^o \qquad (16)$$

Cette information supplémentaire permet de déterminer les valeurs des paramètres de la fonction de coût variable total comme étant la solution du système d'équations (14), (15) et (16). Cette procédure permet d'obtenir une méthode de calibrage plus générale que celle qui consiste à supposer un coût marginal de production à l'hectare nul pour la culture la moins profitable ou des rendements d'échelle constants pour cette culture.

4. L'introduction de la non-linéarité dans la fonction objective.

Bien que les modèles de programmation mathématique positive soient plus flexibles quant aux effets sur l'assolement induits par un changement de politique agricole par exemple, comme les modèles construits sur la base de la programmation linéaire, ils ne prennent pas en compte, ni les effets du prix des produits et des charges sur les rendements ni les effets des changements structurels des exploitations.

Dans la section précédente, nous montrons graphiquement qu'une baisse du prix de l'orge affecte la surface allouée à cette culture. Cette baisse exogène du prix de l'orge n'a aucun effet sur les autres inputs intervenant dans la production de l'orge. En effet, l'hypothèse des recettes par hectare exogènes implique que le rendement par hectare reste constant. Ainsi , les résultats des simulations permettent d'analyse les effets des scénarios considérés sur l'assolement choisi par les exploitations. Mais l'exogénéité des recettes par hectare implique une variation relative des niveaux de production dans des proportions identiques à celle observée sur l'assolement. Notons que lorsque la non-linéarité est spécifiée via une fonction de rendements non-linéaire, une critique semblable peut être faite. Dans ce cas, le programme économique de l'exploitation agricole peut s'écrire de la manière suivante :

$$\max_{l_{i=b,o,t}} \;{}_{i=b,o,t}\,(p_i.b_i.l_i + s_i - c_i)l_i \qquad (17)$$

sous la contrainte :

$${}_{i=b,o,t}\,l_i \leq \bar{l} \qquad (18)$$

avec $b_i l_i$ le rendement à l'hectare. A l'optimum, l'équation suivante doit être vérifiée.

$$p_i 2b_i l_i - c_i = \alpha \qquad (19)$$

où α désigne le multiplicateur du lagrangien associé à ce programme.

Dans ce cas, un choc exogène intervenant sur la production de la culture i (une baisse de prix par exemple) n'aura pas d'effet sur les coûts de production par hectare de cette culture et la surface allouée à cette dernière diminuera. Une autre conséquence de ce choc exogène sur le prix de la culture i, est que le rendement à l'hectare de cette culture augmente. Ainsi, spécifier la non-linéarité de la fonction objective de l'exploitation via une fonction de rendements non-linéaire entraîne des conséquences encore plus irréalistes que celles induites pour une fonction de coût variable totale non-linéaire.

Pour répondre au problème posé par l'exogénéité des recettes par hectare (ou des coûts de production par hectare) plusieurs solutions sont envisageables. La première serait de permettre une flexibilité des rendements en fonction des prix (voir par exemple Barkaoui et Butault , 1998). Cette flexibilité des rendements par rapport aux prix peut, par exemple, être introduite à l'aide d'une fonction quadratique exprimant les rendements en fonction des différentes charges auxquelles l'agriculteur doit faire face. Une seconde solution consisterait à spécifier une fonction de profit quadratique (voir sur ce point, voir Guyomard, Baudry et Carpentier, 1996). Formellement, le programme économique de l'exploitation peut s'écrire comme suit[16] :

$$\text{Max}\,\pi(p_i, l_i) = a_i p_i + b_i l_i + c_i p_i^2 + dl_i^2 + e_i p_i l_i \qquad (20)$$

sous la contrainte :

$${}_{i}\,l_i \leq \bar{l} \qquad (21)$$

A l'optimum, les conditions suivantes doivent être satisfaites :

[16] Dans la spécification de la fonction de profit utilisée, la constante est négligée puisque la solution optimale du programme économique de l'exploitation ne dépend pas de cette constante.

$$\frac{\partial \pi}{\partial l_i} = b_i + 2d_i l_i + e_i p_i = \alpha \quad (22)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_i} = a_i + 2c_i p_i + e_i l_i = y_i \quad (23)$$

où α désigne le multiplicateur du lagrangien associé à ce programme et y_i la production de la culture i.

Le problème qui se pose alors est de calibrer les cinq paramètres de la fonction de profit. Les informations que nous avons à notre disposition, sont celles résumées dans les équations (22) et (23) ainsi que la valeur de la production de chaque culture pour l'année de référence considérée. Ces informations ne suffisent pas pour déterminer les valeurs de ces paramètres. Pour caler le modèle, il faut donc des informations supplémentaires que l'on peut obtenir en utilisant autant d'années de référence que nécessaire. Une autre possibilité est d'utiliser la nouvelle procédure proposée par Paris et Howitt (1998) basée sur la notion d'entropie.

5. Conclusion

Dans cet article nous avons discuté de la validité et des conséquences de l'application « standard » de la PMP en économie agricole. Les principales originalités des modèles d'économie agricole basés sur ce type de programmation mathématique sont leurs aptitudes à reproduire automatiquement la situation observée initialement et à simuler les effets de changement de politique agricole. Il dépassent donc les modèle de PML qui sont généralement confrontés au « trade-off » entre reproduction de la situation initiale et « flexibilité » du modèle. Nous présentons de manière exhaustive les principes de la PMP en considérant le comportement d'une exploitation agricole à l'offre de grandes cultures. Ces principes reposent sur trois idées. La première est de supposer que les contraintes techniques (excepté celle relative à la surface totale disponible), auxquelles fait face l'agriculteur, sont indirectement prises en compte dans la fonction objective. La deuxième idée de la PMP est de considérer que l'assolement observé par l'économiste agricole est une allocation optimale. Ceci justifie le fait que les données observées servent de base pour calibrer le modèle. La troisième idée de la PMP réside dans l'introduction de la non-linéarité dans la fonction objective via une fonction de coût à l'hectare ou bien une fonction de rendements à l'hectare. Ceci entraîne alors un comportement « lisse » du modèle. Bien que ces principes soient relativement simples, leur mise en œuvre est délicate et induit des problèmes pouvant remettre en cause la validité de la PMP dans le cadre de travaux finalisés.

Le premier problème est une conséquence de l'hypothèse de rendements d'échelle constants pour la culture la moins profitable. Nous montrons que cette hypothèse est problématique lors de la phase de simulation. En effet, dans ce cadre, le prix d'opportunité de la terre reste constant et égal au profit marginal de la culture la moins rentable. En outre, un choc exogène sur une culture modifie uniquement la surface allouée à cette culture et celle consacrée à la culture à rendements d'échelle constants. Pour résoudre ce problème, nous proposons deux solutions. L'une d'elle permet de déterminer les paramètres de la fonction de coût variable total en générant un processus de calibrage qui se substitue à la méthode de calibrage proposée par Howitt. L'autre solution consiste à utiliser toutes les informations renseignés dans le RICA et en particulier la valeur du coût variable total. Ceci permet alors d'obtenir une méthode de calibrage plus générale que celle utilisée dans l'application « standard » de la PMP.

Le second problème dont nous discutons est celui lié à l'introduction de la non-linéarité dans la fonction objective. Lorsque la non-linéarité de la fonction objective est spécifier dans les coûts de production, l'exogénité des recettes brutes est supposé. Ainsi, lors de simulations, un choc exogène sur une culture donnée n'aura d'effets que sur un seul input : la terre. En d'autres termes, ce type de modèle de PMP ne permettent pas de tirer des enseignements intéressant ou peu fiables quant aux effets induits sur les niveaux de production. Les modèles de PMP introduisant la non-linéarité de la fonction objective dans les recettes sont sujets à un problème similaire. Un choc exogène sur une culture donné n'aura aucun effet sur le coût variable total à l'hectare. Pour remédier à ce problème deux solutions sont envisageables. La première consiste à introduire une fonction quadratique exprimant les rendements en fonction des différentes charges auxquelles l'agriculteur doit faire face. Ceci permet une flexibilité des rendements par rapport aux prix. Une seconde solution est de formaliser le programme économique de l'exploitation agricole à l'aide d'une fonction de profit quadratique. Dans ce cas, le problème qui se pose est de calibrer les paramètres de cette fonction de profit. Ce calibrage peut être effectué soit en considérant autant d'années de référence qu'il est nécessaire soit en utilisant la méthode de calibrage plus prometteuse basée sur la notion d'entropie.

Nous avons centrer notre analyse sur deux hypothèses communément admises lors de la mise en œuvre standard de la PMP. Cette approche originale génère des modèles d'économie agricole ayant une représentativité du secteur étudié supérieure à celle des modèles de PML. Tout au long de l'article, nous avons considéré le cas d'une exploitation spécialisée en grandes cultures mais l'analyse peut être étendue à l'élevage (voir à ce propos Bauer et Kasnakoglu, 1990). En outre, les modèles d'économie agricole basés sur la PMP permettent de prendre en compte les différents instruments de l'Organisation Commune de Marché considérée (cf. Chantreuil et Gohin, 1999). Malgré d'indéniables avantages, l'analyse des conséquences des hypothèses de la PMP met en exergue les limites de cette approche. Ces limites ne permettent pas pour autant de remettre en cause la PMP, mais montrent que cette approche doit être utilisée avec beaucoup de précautions, en particulier, comme nous le soulignons dans la section 3, lors du calibrage des paramètres du modèle. Les solutions proposées dans cet article suggèrent que la PMP est une approche prometteuse et conjuguée au processus de calibrage basé sur la notion d'entropie deviendra certainement prédominante en économie agricole.

Références

Arfini F. (1996). The Effects of CAP Reform on two Italian Regions : a Positive Mathematical Programming Application. In *What Future for the CAP ? Perspectives and Expectations for the Common Agricultural Policy of the European Union*. Ottone Ferro (ed.), pp. 103-109.

Arfini F. et Paris Q. (1995). A positive mathematical programming model for regional analysis of agricultural policies. Proceedings of the 40th Seminar of the European Association of Agricultural Economists. Ancona, Italy, pp. 17-35.

Barkaoui A., Butault J.P. (1998). Modélisation de l'agriculture meusienne et Paquet Santer. *Economie Rurale*, 248, p. 13-20.

Bauer S. et Kasnakoglu H. (1990). Non Linear Programming Models for Sector Policy Analysis. *Economic Modelling*. Pp. 275-290.

Britz W. et Heckelei T. (1997). Pre-study for a medium-term simulation and forecast model of the agricultural sector for EU. CAPRI Working Papers, 97-01

Carles R., Decouvelaere F.X., Millet G., Revel A., Sourie J.C. (1998). Nouveaux outils pour analyser les effets de la prochaine réforme de la PAC sur les exploitations agricoles. *Economie Rurale*. 243, pp. 56-63.

Chantreuil F. et Gohin A. (1999). Modélisation de l'offre de grandes cultures en France par la programmation mathématique. Document de Travail, INRA-ESR-RENNES.

Garvey E. et Steele C. (1998). Short term Forecast of Structural Changes in Irish Agriculture. CAPRI Working Paper , 98-07.

Guyomard H., Baudry M. et CarpentierA. (1996). Estimation crop supply response in the presence of farm programmes : application to the CAP. *European Review of Agricultural Economics*, pp. 401-420.

Hazell P.B.R., Norton R.D. (1986). *Mathematical Programming for Economic Analysis in Agriculture*. New York, Macmillan.

Heady E.O. (1954). Simplified presentation and logical aspects of linear programming technique. *Journal of Farm Economics.* 24, pp. 1035-1048.

Howitt R.E. (1995a). Positive Mathematical Programming. *American Journal of Agricultural Economics.* 77, pp. 329-342.

Howitt R.E. (1995b). Calibration Methods for Agricultural Economic Production Models. *Journal of Agricultural Economic*. 46, pp. 147-159.

Just R.E., Zilberman D. et Hochman E. (1983). Estimation of a Multicrop Production Functions. *American Journal of Agricultural Economics*. 61, pp. 770-780.

King R.A. (1953). Some applications of activity analysis in agricultural economics. *Journal of Farm Economics*. 25, pp. 823-833.

Leclaire C. (1997). Scénarios des effets de la réforme de l'OCM lait dans la Meuse Modélisation par la programmation mathématique. Mémoire de DAA, ENSA Rennes.

McCarl B.A. (1982). Cropping Activities in Agricultural Sector Models : A methodological Proposal. *American Journal of Agricultural Economics*. 64, pp. 768-771.

Paris Q. et Howitt R.E. (1998). An analysis of Ill-Posed Production Problems Using Maximum Entropy. *American Journal of Agricultural Economics*. 80, pp. 124-138.

Rhöm O., Sinabell F., Dabbert S., Hofreither M.F. (1997). The method of « positive mathematical programming » to evaluate farm and market effects of countryside stewarship policies. *Working paper, Department of Farm Economics, University of Hohenheim.* 18 pages.